# Séries Entières en PT

Sébastian MARCIE[1] – Lycée Caroline Dorian

12 juin 2026

1. Réalisé à partir des cours dispensés par B.Calado, certaines figures TikZ sont adaptées de F.Gaunard ou tikz.net.

# Table des matières

SE - CHAPITRE 1

# Introduction

On va voir certaines notions hors-programme pour saisir concrètement ce que sont les séries entières.

## I - Suites de fonctions (HP)

### I.1 - Notation

Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ (en général un intervalle).
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$$

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite de fonctions**.

### I.2 - Convergence simple

Soit $(u_n)$ définie comme précédemment et $u : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$.

**Définition 1.1.**
On dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers $u$ *ssi* :
Pour tout $x \in \mathcal{D}$, la suite $(u_n(x))$ converge vers $u(x)$.

On note $u_n \xrightarrow{\text{cvs}} u$ *i.e.* : $\forall x \in \mathcal{D},\ u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(x)$.

**Vocabulaire.**
$(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **suite numérique**.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **suite de fonctions**.

### I.3 - Mauvaises notions pour faire de l'analyse

On a envie d'avoir les théorèmes suivant sympa :

**Théorème: faux.**

a) Une limite de fonctions continue est continue.

b) $\displaystyle\int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} u_n(x)\right) \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b u_n(x) \,\mathrm{d}x.$

Malheureusement, les deux sont Faux.

**Exemple** (contres exemples)**.**

Pour a) :

Soit $\mathcal{D} = [0, 1]$. On pose $u_n(x) = x^n$.

Pour $x \in \mathcal{D}$ :

$$u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

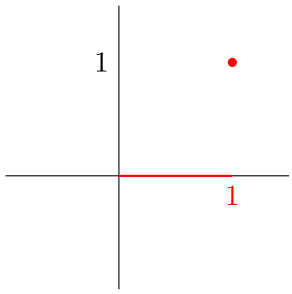



**Figure 1.1** – graphe de $u_n(x)$

Pour b) : Soit $\mathcal{D} = [0, 1]$ et $u_n$ de graphe suivant (pour $n \geqslant 2$) :

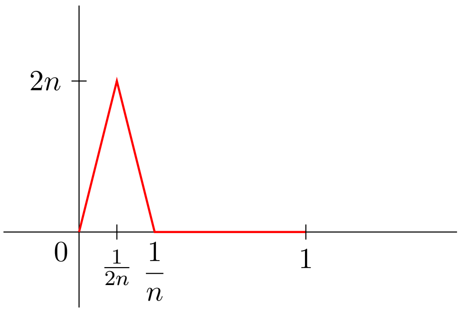



**Figure 1.2**

On peut donc calculer graphiquement

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_n(x) \,\mathrm{d}x &= \text{ l'aire du triangle} \\ &= \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Or, :

$$\forall x \in \mathcal{D},\ u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $u(x) = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 u(x) \,\mathrm{d}x = 0$.

Donc,

$$1 = \int_0^1 u_n(x) \,\mathrm{d}x \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 u(x) \,\mathrm{d}x$$

Pour $x = 0$, la suite $(u_n(x))_{n\geqslant 0}$ est nulle.

Pour $x = ]0, 1]$ :

La suite $(u_n(x))_{n\geqslant 2}$ stationne en 0 à partir du rang $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1 = n_0(x)$.

$n_0(x) > \frac{1}{x}$ est un entier.

Pour tout $n \geqslant n_0(x)$, $\frac{1}{n} < x$ donc $u_n(x) = 0$.

### I.4 - Convergence uniforme

Les MP voient cette notion :

**Proposition: convergence uniforme.**

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est $\mathcal{C}^0$ alors $u$ est $\mathcal{C}^0$.

Et, si $u_n \in \mathcal{C}^0$ en convergeant uniformément vers $u$ sur $[a, b]$ alors, $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x$

Mais si $u_n$ converge uniformément vers $u$ et $u_n \in \mathcal{C}^1$ pour alors on n'a pas $u \in \mathcal{C}^1$ et $u'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u$.
Pour pourvoir dériver le théorème est encore plus compliqué.

## II - Séries de fonctions (HP)

Comme pour les séries numériques, on passe des suites aux séries en étudiant la suite des sommes partielles.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n : D \to \mathbb{K}$, et on s'intéresse à la série de fonction $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$

### II.1 - Convergence simple

**Proposition 1.1.**

$\sum u_n$ converge **simplement** vers $S$ *ssi* $\forall x \in \mathcal{D}$ $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(x)$ converge de somme $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

**Exemple** (exponentielle)**.**

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

**Exemple** (série de Riemann)**.**
Soit $\mathcal{D} = ]1, +\infty[$, on pose :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

$S$ est une fonction définie sur $]1, +\infty[$.

$S_N(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} u_n(x)$ est la $N^{\text{ème}}$ somme partielle.

La série de fonction $\sum u_n$ converge simplement vers $S$ *ssi* la suite de fonction $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $S$.

# III - Séries entières

## III.1 - Définition

**Définition 1.2.**

Une **série entière** est une série de fonction de la forme : $\sum\limits_{n\geqslant 0}$ *i.e.* $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n(x)=a_nx^n$.

**Cas particulier.**

$\sum\limits_{n\geqslant 0} b_nx^{2n}$ série entière de fonctions paires; $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_nx^{2n+1}$ série entière des fonctions impaires ou encore $\sum\limits_{n\geqslant 0} d_nx^{k_n}$ avec $(k_n)$ une suite d'entiers strictement croissante.

## III.2 - Théorèmes tous sympa

On verra :

### a) Domaine de convergence

Résultat sympa et la règle de d'Alembert nous donnera toutes les fonctions usuelles.

### b) Sommes $\mathcal{C}^\infty$

Elles sont toutes $\mathcal{C}^\infty$ donc on peut les dériver comme un polynôme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n\right)=\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}$$

Mais on peut aussi les intégrer :

$$\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\int_a^b x^n\,\mathrm{d}x$$

### c) Fonctions usuelles

Les fonctions seront usuelles, donc il faudra connaître les $\mathrm{DL}_0$ :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des coefficients du $\mathrm{DL}_0$.
Il faut donc connaître bien tous les DL.

**Remarque**

Il possible de prouver tout les résultats à l'aide des outils de la PT.

SE - CHAPITRE 2

# Les théorèmes

Ce chapitre est une fiche des théorèmes, on les prouvera au prochain chapitre.

## I - Rayon et domaine de convergence

### I.1 - Série entière de coefficient

**Définition 2.1.**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
La **série entière de coefficient** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la série de fonction : $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

### I.2 - Domaine de définition

C'est l'énoncé le plus compliqué.
Notons $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des réels $x$ tels que la série converge *i.e.* : $\mathcal{D}_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum a_n x^n \text{ converge}\}$.
C'est le domaine de définition de : $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
On a aussi $\mathcal{D}_{\mathbb{C}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \sum a_n z^n \text{ converge}\}$ le domaine de définition complexe et
$\mathcal{B} = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{ la suite } (a_n r^n)_{n\geqslant 0} \text{ est bornée}\}$

**Théorème 2.1.**

**Ou bien :**
$\mathcal{B} = \mathbb{R}_+$ et alors $\mathcal{D}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$.
De plus,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sum a_n z^n \text{ est AVC}$$

La fonction $S$ (appelée la somme de la série entière $\sum a_n x^n$) est donc définie sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).
**Ou bien :**
$\mathcal{B} = \{0\}$ et alors $\mathcal{D}_{\mathbb{R}} = \mathcal{D}_{\mathbb{C}} = \{0\}$ et $S$ est définie uniquement en 0 et on n'a pas plus de résultats dans ce cas.

**Ou bien :**

$$\exists! R \in ]0, +\infty[, \quad [0, R[ \subset \mathcal{B} \subset [0, R]$$

Dans ce cas :

$$\begin{cases} ]-R, R[ \subset \mathcal{D}_{\mathbb{R}} [-R, R] \\ D_{\text{ouv}}(O, R) \subset \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \subset D_{\text{fer}}(O, R) \end{cases}$$

Avec $D_{\text{ouv}} = \{z \in \mathbb{C}, \mid |z| < R\}$ le disque ouvert de centre $O$ et de rayon $R$.
Et $D_{\text{fer}} = \{z \in \mathbb{C}, \mid |z| \leqslant R\}$ le disque fermé de centre $O$ et de rayon $R$.
De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| < R$ la série (numérique) $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

## I.3 - Dessin dans le cas réel

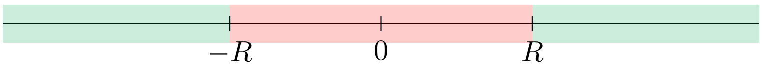



**Figure 2.1**

**⚠ Remarque ⚠**

Le théorème ne donne rien pour $|x| = R$.
On verra des exemples avec $\mathcal{D}_{\mathbb{R}} = [-R, R]$, d'autres avec $\mathcal{D}_{\mathbb{R}} = ]-R, R[$ et d'autres avec $\mathcal{D}_{\mathbb{R}} = ]-R, R[$ ou $[-R, R[$.

## I.4 - Dessin dans le cas complexe

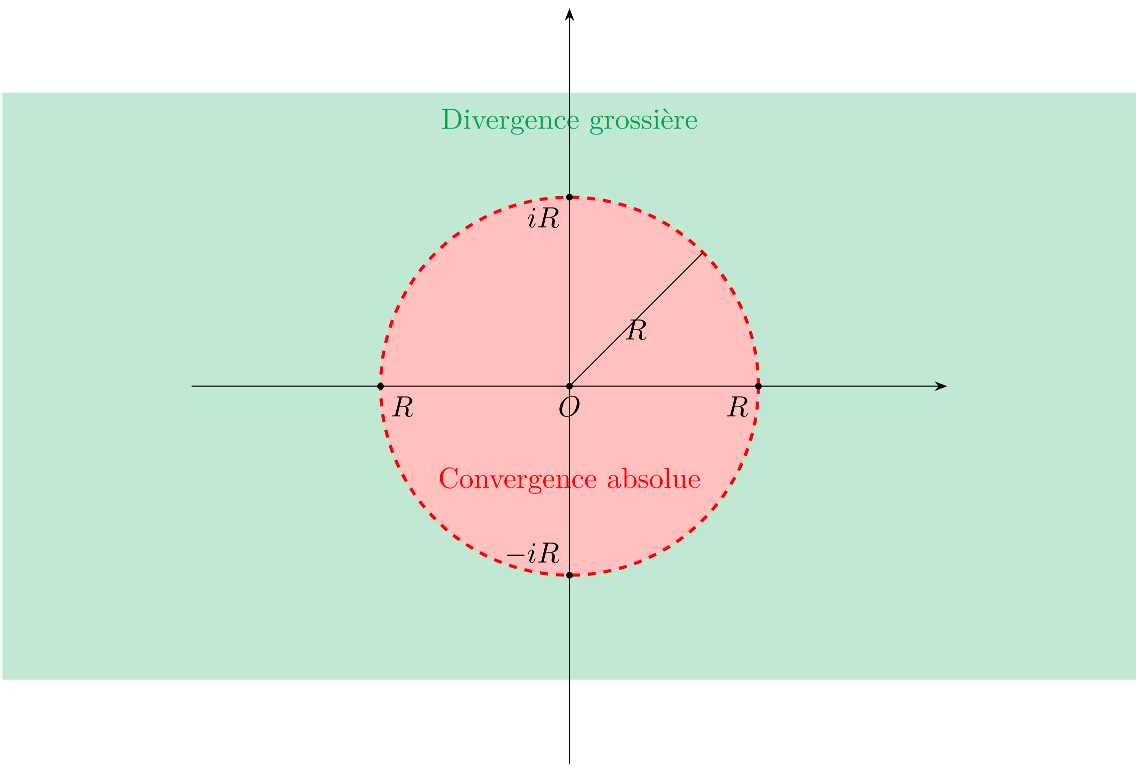



**Figure 2.2**

⚠ **Remarque** ⚠

Le théorème ne donne rien pour $|z| = R$.

## I.5 - Vocabulaire important

### a) Cas réel

$]-R, R[$ s'appelle **l'intervalle ouvert de convergence** :

$$x \in ]-R, R[ \Longrightarrow \quad \text{la série } \sum a_n x^n \text{ converge}$$

### b) Cas complexe

$D_{\text{ouv}}(O, R)$ s'appelle **le disque ouvert de convergence** :

$$z \in D_{\text{ouv}}(O, R) \quad \Longrightarrow \quad \text{la série } \sum a_n z^n \text{ converge}$$

Le cercle de centre $O$ et de rayon $R$ s'appelle le cercle d'incertitude.
Si $|z| = R$ alors le théorème ne donne rien et il faut faire une étude.

**Remarque**

L'exemple le plus important avec $\mathbb{C}$ sera la fonction exponentielle où $\mathcal{D}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$.

## I.6 - Rayon de convergence

### a) Premier ou bien

On a $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$.
On dit que le **rayon de convergence** est infini et on note $R = +\infty$ *i.e.* $\mathcal{D}_{\mathbb{R}} = ]-\infty, +\infty[ = ]-R, R[$.

### b) Deuxième ou bien

On a $\mathcal{D}_{\mathbb{R}} = \mathcal{D}_{\mathbb{C}} = \{0\}$.
On dit que le **rayon de convergence** est nul et on note $R = 0$.

### c) Troisième ou bien

C'est le "**ou bien**" où le théorème donne :

$$\exists! R \in ]0, +\infty[, \ \ [0, R[ \subset \mathcal{B} \subset [0, R]$$

Le réel $R$ est appelé rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ ou $\sum a_n z^n$.

Dans les deux cas intéressant pour faire de l'analyse ($1^{\text{er}}$ et $3^{\text{ème}}$ ou bien) on a donc $\boxed{]-R, R[ \subset \mathcal{D}_{\mathbb{R}}}$.
$\boxed{]-R, R[}$ est appelé **l'intervalle ouvert de convergence** (I.O.C.)
Tous les théorèmes sympa vont utiliser l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

## I.7 - Exemples

### a) Série entière géométrique

Son domaine de convergence est connu $\mathcal{D}_{\mathbb{R}} = ]-1,1[$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{C}} = D_{\text{ouv}}(O,R)$ :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < 1 : \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}}$$

## I.8 - Série entière exponentielle

On a vu (exercice sur la règle de d'Alembert) que $\mathcal{D}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$.
Avec la formule de Taylor avec reste intégral, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

# II - Théorèmes de régularité

**Vocabulaire.**
La fonction $\begin{array}{rccc} S: & ]-R,R[ & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$ est appelée **la somme de la série entière $\sum a_n x^n$**

## II.1 - Théorème de continuité

**Théorème 2.2.**

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Alors la fonction $\begin{array}{rccc} S: & ]-R,R[ & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$ est $\mathcal{C}^0$.

**Mémo en Français.**
La somme d'une série entière est continue sur l'intervalle ouvert de convergence.

## II.2 - Théorème de dérivation

**Théorème 2.3.**

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Alors, la fonction $\begin{array}{rccc} S: & ]-R,R[ & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

**De plus.**

i) Formule pour $S'(x)$:

$$\boxed{\forall x \in ]-R,R[,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}}$$

ii) La série entière $\sum n a_n x^{n-1}$ s'appelle la série entière dérivée de la série entière $\sum a_n x^n$.
Cette série entière à la même rayon de convergence $R$.

**Remarque**

Le théorème du II.2 implique celui du II.1 (car dérivable implique continue) mais pour démontrer les théorèmes, on commence par démontrer le premier. La preuve est technique mais faisable avec les outils PT.

## II.3 - Théorème de dérivation à tout ordre

**Théorème 2.4.**

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Alors, la fonction $\begin{array}{rccl} S: & ]-R, R[ & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On a :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in ]-R, R[,\ S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}}$$

**En particulier.**

Pour $x = 0$ :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ S^{(k)}(0) = k! a_k \implies a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in ]-R, R[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n}$$

**Vocabulaire.**

$\sum \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n$ s'appelle un **développement en série entière**.

**⚠ Remarque ⚠**

Taylor-Young pour les $\mathrm{DL}_0$ en sup se fait pour des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, et pour $N \in \mathbb{N}$ :

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + o(x^N)$$

veut dire : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}{x^N}$ existe et vaut 0.

Alors que le développement en série entière :

$$\forall x \in ]-R, R[,\ S(x) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Les **deux notions n'ont rien à voir**. Le seul point commun sont les coefficients.

Pour les DSE : $\forall x \in ]-R, R[,\ S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n$, la somme est toute la série sans reste.
Alors que les formules de Taylor ont toujours un reste (intégral ou $o$).

# III - Intégration terme à terme et série entière primitive

On commence par deux énoncés équivalent :

## III.1 - Série entière primitive

Soit $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

On a vu que $\begin{array}{rccl} S: & ]-R,R[ & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$ est $\mathcal{C}^\infty$.

**Théorème 2.5.**

La fonction $\begin{array}{rccl} F: & ]-R,R[ & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \end{array}$ est **une** primitive de $S$ *i.e.* $F$ est dérivable et $F' = S$,

ce qui signifie :

$$\forall x \in ]-R,R[, \ \ F'(x) = S(x)$$

Comme $S$ est $\mathcal{C}^\infty$, $F$ est $\mathcal{C}^\infty$.

**⚠ Remarque ⚠**

$F$ est **la** primitive **nulle en** $0$ de $S$.

***Preuve.***

C'est un corollaire facile du théorème de dérivation (2.3.) qu'on a admis, le rayon de convergence de la série entière primitive $\sum a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ est aussi $R$. □

## III.2 - Intégration terme à terme d'une S.E. sur un segment contenu dans l'intervalle ouvert de convergence

**Théorème 2.6.**

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Alors :

$$\boxed{\forall (u,v) \in ]-R,R[^2, \ \int_u^v \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{v^{n+1} - u^{n+1}}{n+1}}$$

**Commentaires.**

On peut calculer : $\displaystyle\int_u^v \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \mathrm{d}x$ comme si on intégrait un polynôme.

Montrons qu'il y a une équivalence entre les deux théorème (2.6) $\iff$ (2.5)

***Preuve (Sens direct).***

La primitive nulle en 0 de $\begin{array}{rccl} S: & ]-R,R[ & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$ est $\begin{array}{rccl} F: & ]-R,R[ & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$.

Or par le le théorème (2.5) :

$$\forall x \in ]-R,R[, \ \int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

D'où le résultat. $\square$

***Preuve (Sens réciproque).***

Par le théorème 2.5, $\begin{array}{rccl} F: & ]-R,R[ & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+} \infty \end{array}$ $a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de $\begin{array}{rccl} S: & ]-R,R[ & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$.

On a donc :

$$\forall (u,v) ]-R,R[^2, \ \int_u^v S(x)\,\mathrm{d}x = F(v) - F(i)$$

*i.e.*

$$\int_u^v \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{v^{n+1} - u^{n+1}}{n+1}$$

$\square$

**Remarque**

Avec nos outils PT c'est plus facile de prouver le théorème 2.5 (Série entière primitive) puis d'en déduire le théorème de dérivation (SE dérivée) qu'on a admis.

# IV - Développements en série entière usuels

## IV.1 - Type géométrique ($R = 1$)

**Proposition 2.1.**

Pour tout $x \in ]-1,1[$ :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} = \frac{1}{1-x}}$$

De rayon de convergence $R = 1$

Ici on connait exactement le domaine de convergence :

$$\sum z^n \text{ converge } \iff |z| < 1$$

D'où $R = 1$.

**Rappel**

$R$ est caractérisé par $]-R,R[ \subset \mathcal{D}_{\mathbb{R}} \subset [-R,R]$ ou $D_{\text{ouv}}(O,R) \subset \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \subset D_{\text{fer}}(O,R)$ ici, $\mathcal{D}_{\mathbb{R}} = ]-1,1[$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{C}} = D_{\text{ouv}}(O,1)$ d'où $R = 1$.

**Proposition 2.2.**

Pour tout $x \in ]-1,1[$ :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{x+1}}$$

De rayon de convergence $R = 1$

**Proposition 2.3: Dérivées géométrique.**

Soit $\begin{array}{rccl} S: & ]-1,1[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n \end{array}$.

Le théorème de dérivation donne :

i) $S$ est $\mathcal{C}^\infty$, ici cela n'apporte rien car on sait que $\begin{array}{rccl} : & \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{1-x} \end{array}$ est $\mathcal{C}^\infty$ comme inverse d'une fonction affine qui ne s'annule pas.

ii) $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in ]-1,1[,$ :

$$\boxed{S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}}$$

La formule est facile à retrouver :

Pour tout $x \neq 1$ :

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = -\frac{(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$
$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \left((1-x)^{-2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

***Preuve.***

La récurrence est immédiate donc on fait seulement l'hérédité :

$$\begin{aligned} \left(\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}\right)' &= \left(k!(1-x)^{-(k+1)}\right)' \\ &= k!(-(k+1))(-1)(1-x)^{-(k+1)-1} \\ &= \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}} \end{aligned}$$

**Conclusion.** On obtient :

$$\boxed{\forall x \in ]-1,1[,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n! x^{n-k}}{(n-k)!}}$$

*i.e.* :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} \\ \Longrightarrow\ & \frac{1}{(1-x)^{n-k}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \binom{p+k}{k} x^p, \text{ avec le chgm d'indice } p = n-k \end{aligned}$$

□

**Remarque**

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(k)} = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$$

**Proposition 2.4: Variantes.**

$\forall x \in ]-1,1[$ et $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$$
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$
$$\frac{1}{1-x^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{kn}$$

**Proposition 2.5: primitives.**

$\forall t \in ]-1,1[$,

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$$

En posant $t = -x^2$ : $\forall x \in ]-1,1[$,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

En primitivant : $\forall x \in ]-1,1[$,

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$\forall t \in ]-1,1[$,

$$(1+t)^\alpha = \dots$$

En posant $t = -x^2$ et $\alpha = 1$ on a : $\forall x \in ]-1,1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \dots$$

En primitivant : $\forall x \in ]-1,1[$,

$$\arcsin(x) =$$

avec $R = 1$.

## IV.2 - Retour sur le théorème de dérivation

**Proposition 2.6.**

Pour tout $x \in ]-R,R[$ : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$

Le théorème de dérivation donne donc : $\forall x \in ]-R,R[$,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

De même pour les dérivée suivantes : $\forall x \in ]-R, R[$

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

**Remarque**

On peut procéder à des changements d'indices.
En posant $p = n - 1$ : $\forall x \in ]-R, R[$

$$S'(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1)a_{p+1}x^p$$

En posant $p = n - 2$ : $\forall x \in ]-R, R[$

$$S''(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (p+2)(p+1)a_{p+2}x^p$$

**Rappel**

La dérivation conserve le rayon de convergence.
Toutes les séries entières dérivées (à tout ordre) ont le même rayon de convergence : $R = 1$.

## IV.3 - Type logarithmique ($R = 1$)

On peut appliquer le théorème de la série entière primitive (2.5) :

**Proposition 2.7.**

$\forall x \in ]-1, 1[$,

$$\boxed{-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

avec $R = 1$.

car la série entière primitive a le même rayon de convergence (ici $R = 1$).
De même avec $\dfrac{1}{1+x}$, on obtient :

**Proposition 2.8.**

$\forall x \in ]-1, 1[$,

$$\boxed{\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \overset{p=n+1}{=} \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p-1} \frac{x^p}{p}}$$

avec $R = 1$.

**Proposition 2.9: variantes.**

$\forall x \in ]-1, 1[$ :

$$\ln(1-t^2) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n}$$

$$\ln(1+t^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{2n}}{n}$$

## IV.4 - Type exponentiel ($R = +\infty$)

**Proposition 2.10.**

$\forall x \in \mathbb{R} = ]-R, R[ = ]-\infty, +\infty[$ :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

avec $R = +\infty$.

C'est un classique de sup avec le formule de Taylor avec reste intégral.

On le prouvera avec nos outils de série entière.

**Proposition 2.11.**

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

### Remarque

C'est comme pour les $\mathrm{DL}_0$ (cependant la notion de DL et de série entière n'ont rien à voir) :

Si une fonction est paire alors les exposants de sa DSE sont pairs

Si une fonction est impaire alors les exposants de sa DSE sont impairs.

**Proposition 2.12.**

$\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

### Remarque

Pour l'instant c'est une arnak car on a vu seulement $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Et on a utilisé $e^{ix}$ mais on a la proposition suivante :

**Proposition 2.13.**
$\forall z \in \mathbb{C}$ :
$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

## IV.5 - Type $(1+x)^\alpha$ $(R=1)$

**Proposition 2.14.**
Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ (si $\alpha \in \mathbb{N}$ alors $(1+x)^\alpha$ est un polynôme).
$\forall x \in ]-1,1[$ :
$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$
avec $R = 1$.

**Mémo.**
Si $p = \in \mathbb{N}$ :
$$\begin{aligned}(1+x)^p &= \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{p} \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!} x^n\end{aligned}$$

En effet,
$$\frac{p!}{(p-n)!} = p(p-1)\dots(p-n+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(p-k)$$

Si on remplace $p$ par $\alpha$ on obtient le résultat.

On retrouve le nom : série entière "binôme de Newton"

**Exemple** (avec ch)**.**

Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ , $\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge.

On fixe $x \in \mathbb{R}^*$, (pour $x = 0$ on sait que la série converge) et on pose pour $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \frac{x^{2n}}{(2n!)} > 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ :
$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{x^{2n}} \\ &= \frac{x^2 \times (2n)!}{(2)! \times (2n+1)(2n+2)} \\ &= \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

Ainsi, $\ell = 0 < 1$ donc la règle de d'Alembert pour séries numérique donne $\sum u_n$ converge *i.e.* $\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge.

### Justification du rayon

On a $a_n = \dfrac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}$.
Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, fixons $x \in \mathbb{R}^*$ et posons pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_n = |a_n x^n| > 0$$

On essaye d'appliquer la règle de d'Alembert.
Fixons $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} \\ &= \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \times |x|\end{aligned}$$

Simplifions : $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ :

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\prod_{k=0}^{n}(\alpha-k)}{(n+1)!}\frac{(n)!}{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)} \\ &= \frac{1}{n+1} \times \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))(\alpha-n)}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))} \\ &= \frac{n-\alpha}{n+1}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| \times |x| \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} |-1||x| = |x|\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

**Proposition 2.15: Règle de d'Alembert.**

Si $|x| < 1$ alors :

$$\sum a_n x^n \text{ absolument convergente donc convergente.}$$

Si $|x| > 1$ alors :

$$|a_n x_n| = u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \neq 0 \text{ donc } \sum a_n x^n \text{ divergente.}$$

**Conclusion.**

$$]-1,1[\subset \mathcal{D}_{\text{cv}} \subset [-1,1]$$

SE - CHAPITRE 3

# Lemme d'Abel et applications

## I - Lemme d'Ablel

### I.1 - Énoncé

**Lemme 3.1.**

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
On suppose que $r > 0$ vérifie :

$$\text{la suite } (a_n r^n)_{n\geqslant 0} \text{ est bornée}$$

Alors :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < r \implies \sum a_n z^n \text{est ACV}}$$

### I.2 - Preuve

***Preuve.***
Comme $(a_n r^n)$ est bornée alors :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N}, |a_n r^n| \leqslant M$$

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{r^n}$$

car $r > 0$.
Soit $|z| \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$.
On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |a_n z^n| &= |a_n| \times |z^n| \\ &\leqslant \frac{M}{r^n} \times |z|^n \\ &= M \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \end{aligned}$$

Or la série géométrique $\sum M\left(\frac{|z|}{r}\right)^n$ converge car sa raison $\dfrac{|z|}{r} \in [0,1[$.
Le théorème de comparaison pour séries à terme positifs (majoration explicite) donne : $\sum |a_n z^n|$ converge.
Donc $\sum a_n z^n$ est bien absolument convergente. □

# II - Application au domaine de convergence

## II.1 - Énoncé

**Proposition 3.1.**

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
On note, $\mathcal{B} = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\}$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{K}} = \{z \in \mathbb{K} \mid \text{la série } \sum a_n z^n \text{ converge}\}$.
Il y a trois possibilités :

i) $\mathcal{B} = \{0\}$ dans ce cas, $\mathcal{D}_{\mathbb{K}} = \{0\}$ (fonction définie uniquement en 0 donc on ne peut pas faire de l'analyse avec)

ii) $\mathcal{B} = \mathbb{R}_+$.
Dans ce cas $\mathcal{D}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

iii) On pose $R = \sup(\mathcal{B}) \in \mathbb{R}_+$.
Dans ce cas,

$$]-R, R[ \subset \mathcal{D}_{\mathbb{R}} \subset [-R, R] \quad \text{et} \quad D_{\text{ouv}}(O,R) \subset \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \subset D_{\text{fer}}(O,R)$$

## II.2 - Preuves

***Preuve (point i)).***
On suppose que $\mathcal{B} = \{0\}$ *i.e.* pour tout $r > 0$, la suite $(a_n r^n)_{n\geqslant 0}$ est non-bornée.
Montrons que $\mathcal{D}_{\mathbb{K}} = \{0\}$.

**Sens $\supset$ :**
$0 \in \mathcal{D}_{\mathbb{K}}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n 0^n = a_0$ (on c'est le polynôme de coefficient $a_n$ évalué en 0)

**Sens $\subset$ :**
On raisonne par contraposée.
Soit $z \in \mathbb{K}^*$. Montrons que la série $\sum a_n z^n$ diverge.
On a : $|z| > 0$ car $z \in \mathbb{K}^*$ donc la suite $(a_n |z|^n)$ est non-bornée, d'où la suite $(a_n z^n)$ est non-bornée donc ne tend pas vers 0. D'où $\sum a_n z^n$ diverge (grossièrement) □

***Preuve (point 2).***
On suppose que $\mathcal{B} = \mathbb{R}_+$.
Soit $z \in \mathbb{C}$, montrons que $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
Posons $r = |z| + 1$.
On a bien $r \in \mathcal{B} = \mathbb{R}_+$ et $|z| < r$.
Par le lemme d'Abel, $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. □

***Preuve (point 3 (pistes)).***

a) On commence par remarquer : $r \in \mathcal{B} \implies [0, r] \subset \mathcal{B}$.

b) Comme $\begin{cases} \mathcal{B} \neq \{0\} \text{ il existe } a \in \mathcal{B} \text{ avec } a > 0 \\ \mathcal{B} \neq \mathbb{R}_+ \text{ il existe } b \in \mathbb{R}_+ \text{ et } b \notin \mathcal{B} \end{cases}$, on en déduit que $\mathcal{B} \subset [0, b]$ donc $\mathcal{B}$ est majorée.

c) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ car $0 \in \mathcal{B}$ donc $R = \sup(\mathcal{B})$ existe (notion difficile $R$ est le plus petit majorant).

d) $a \in \mathcal{B}$ donc $R \geqslant a$, quantification de $R$ majore $\mathcal{B}$ :

$$\forall x \in \mathcal{B},\ x \leqslant R$$

Comme $a > 0$ et $R > 0$, $R \in \mathbb{R}_+$

e) $]-R, R[ \subset \mathcal{D}_\mathbb{R} \subset [-R, R]$ ou $D_{\text{ouv}}(O, R) \subset \mathcal{D}_\mathbb{R} \subset [D_{\text{fer}}(O, R)$.
Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (analogue pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) :
<u>$\mathcal{D}_\mathbb{R} \subset [-R, R]$ **:**</u>
Par contraposée, on montre que $|x| > R \implies \sum a_n x^n$ diverge.
Comme précédemment,

$$\begin{aligned} |x| > R &\implies (a_n x^n) \text{ non bornée} \\ &\implies a_n x^n \not\to 0 \\ &\implies \sum a_n x^n \text{diverge.} \end{aligned}$$

<u>$\mathcal{D}_\mathbb{R} \supset ]-R, R[$ **:**</u>
Soit $x \in ]-R, R[$, $|x| < R$, donc $|x|$ ne majore pas $\mathcal{B}$.
Quantification : $\exists r \in \mathcal{B}, r > |x|$.
Ainsi, $\begin{cases} r \in \mathcal{B} \\ |x| < r \end{cases}$.
Par le lemme d'Abel, $\sum a_n x^n$ converge absolument.

□

## II.3 - Important (II.5 pour les autres)

$\sum a_n x^n$ converge

## II.4 - Application en pratique

i) $\sum a_n x^n$ telle que $\sum a_n z_0^n$ converge. Alors

$$\boxed{R \geqslant |z_0|}$$

En effet, par l'absurde (ou contraposée) :

***Preuve.***

$$\begin{aligned} |z_0| > R &\implies (a_n z_0^n) \text{ non bornée} \\ &\implies a_n z_0^n \not\to 0 \\ &\implies \sum a_n z_0^n \text{ diverge} \end{aligned}$$

□

ii) $z_0$ tel que $\sum a_n z_0^n$ converge (ou $a_n z_0^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ou $(a_n z_0^n)$ bornée).
Alors,

$$\boxed{|z_0| \leqslant R}$$

**⚠ Remarque ⚠**

> Si $|z| = R$ le théorème ne donne rien

## II.5 - Exemple de comportement si $|x| = R$

**a)** $\sum x^n$

On a $R = 1$ et $\mathcal{D}_\mathbb{R} = ]-1, 1[$, ainsi si $|x| = 1$ alors $\sum x^n$ diverge.

**b)** $\sum \dfrac{x^n}{n}$

On a $R = 1$ et $\mathcal{D}_\mathbb{R} = [-1, 1[$ or $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc $1 \notin \mathcal{D}_\mathbb{R}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge donc $1 \in \mathcal{D}_\mathbb{R}$.

**c)** $\sum (-1)^n \dfrac{x^n}{n}$

On a $\mathcal{D}_\mathbb{R} = ]-1, 1]$.

**d)** $\sum \dfrac{x^n}{n^2}$

On a $R = 1$.
En effet : on fixe $x \in \mathbb{R}^*$ et on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \left|\dfrac{x^n}{n^2}\right| > 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right| \times \left|\frac{n2}{x^n}\right| \\ &= |x| \frac{n^2}{(n+1)^2} \\ &\xrightarrow[n \to +\infty]{} |x|\end{aligned}$$

Par la règle de d'Alembert (pour séries numérique) :

$$\begin{aligned}|x| < 1 &\implies \sum u_n \text{ converge} \\ &\implies \sum \frac{x^n}{n^2} \text{ converge absolument}\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}|x| > 1 &\implies u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \\ &\implies \left|\frac{x^n}{n^2}\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \qquad \implies \frac{x^n}{n^2} \not\to 0 \\ &\implies \sum \frac{x^n}{n^2} \text{ diverge (grossièrement)}\end{aligned}$$

On en déduit que $R = 1$ :

**Figure 3.1**

**Les inclusions :**
$R$ est caractérisé par

$$]-R, R[ \subset \mathcal{D}_\mathbb{R} \subset [-1, 1]$$

**Remarque**

> On aura d'Alembert séries entières mais parfois il sera non-applicable.

$\sum \frac{x^n}{n^2}$ : on a montré que $R = 1$.
$\mathcal{D}_\mathbb{R} = [-1, 1]$ (et $\mathcal{D}_\mathbb{C} = D_{\text{fer}}(O, 1)$) :

$$\begin{aligned} |x| \leqslant 1 &\implies \left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2} \\ &\implies \sum \frac{x^n}{n^2} \text{ converge absolument} \end{aligned}$$

par le théorème de comparaison pour série à terme positif (majoration explicite) et série de Riemann pour $\alpha = 2 > 1$.

# III - Méthode pour calculer $R$

## III.1 - Règle de d'Alembert pour séries entières

### a) Énoncé

**Proposition 3.2.**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ telle que à partir d'un certain rang $a_n \neq 0$ et $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Alors,

$$R = \frac{1}{\ell}$$

### b) Exemple

i) $a_n = \frac{1}{n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} \sim \frac{1}{n^2} = a_n$$

donc $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ d'où

$$\boxed{R = \frac{1}{1} = 1}$$

ii) $\sum \frac{x^{2n}}{(2n!)}$, on a $a_{2n} = \frac{1}{(2n)!}$ et $a_{2n+1} = 0$ donc d'Alembert série entière inapplicable.
Mais on l'a vu avec d'Alembert série numérie :

### c) Preuve

***Preuve.***

On procède avec d'Alembert pour série numérique.

Fixons $x \in \mathbb{R}^*$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = |a_n x^n| > 0$.

Pour $n \geqslant n_0$ :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \times |x|$$

Donc,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \times |x|$$

La règle de d'Alembert pour séries numériques donne :

$$\begin{aligned}|x| < \frac{1}{\ell} &\implies \sum u_n \text{ converge}\\ &\implies \sum |a_n x^n| \text{ converge}\\ &\implies \sum a_n x^n \text{ converge absolument}\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}|x| > \frac{1}{\ell} &\implies u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty\\ &\implies a_n x^n \not\to 0\\ &\implies \sum a_n x^n \text{ diverge (grossièrement)}\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D}_{\mathbb{R}} \subset \left[-\frac{1}{\ell}, \frac{1}{\ell}\right]$.
Ainsi,

$$\left]-\frac{1}{\ell}, \frac{1}{\ell}\right[ \subset \mathcal{D}_{\mathbb{R}} \subset \left[-\frac{1}{\ell}, \frac{1}{\ell}\right]$$

d'où $R = \frac{1}{\ell}$, car $R$ est caractérisé par :

**Figure 3.2** – $]-R, R[\subset \mathcal{D}_{\mathbb{R}} \subset [-R, R]$

□

## III.2 - Comparaison de rayons de convergence

### a) Majoration explicite

Soit $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R_a$ et $\sum b_n x^n$ de rayon de convergence $R_b$.
On suppose qu'à partir d'un certain rang : $|a_n| \leqslant |b_n|$.
Alors

$$\boxed{R_a \geqslant R_b}$$

### b) Exemples usuels

pour $a_n = \frac{1}{n!}$ $R = +\infty$.
Pour

### c) Preuve

***Preuve.***
Supposons qu'à partir d'un certain rang $|a_n| \leqslant |b_n|$. Montrons que $R_a \geqslant R_b$.
Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{apcr } |a_n x^n| \leqslant |b_n x^n|$$

Par le théorème de comparaison pour série à terme positif (majoration explicite) : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sum b_n x^n \text{ absolument convergente} \implies \sum a_n x^b \text{ absolument convergente}$$

d'où

$$x \in ]-R_b, R_b[ \implies \sum a_n x^n \text{ absolument convergente}$$

puisque $x \in ]-R_b, R_b[$, alors $\sum b_n x^n$ absolument convergente.
En particulier

$$]-R_b, R_b[ \subset \mathcal{D}_{cv,\text{ réel de } \sum a_n x^n}$$

d'où $R_a \geqslant R_b$, puisque $R_a = \sup(\mathcal{D}_{\text{cv, réel}})$

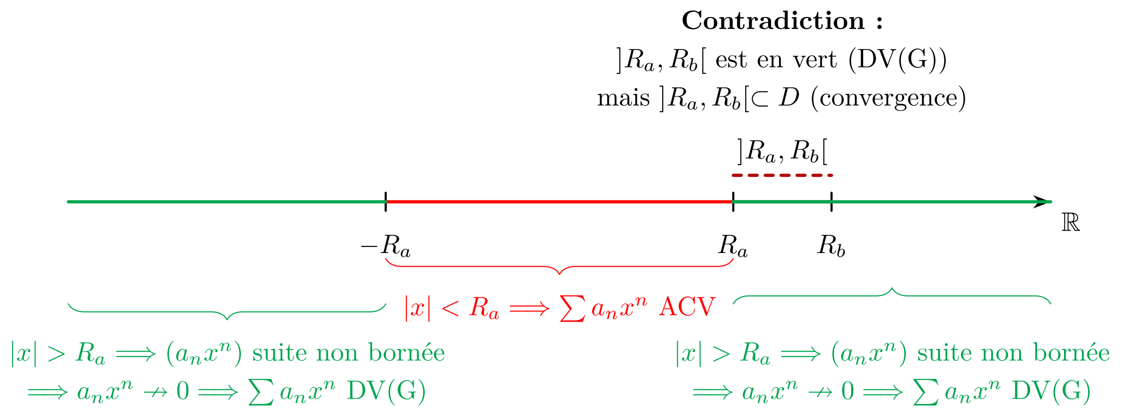



**Figure 3.3** – Schéma du domaine de convergence d'une série entière et contradiction si $R_b > R_a$.

□

## d) Variantes

Comme pour les théorèmes de comparaison pour série à termes positifs, on en déduit :

$$\begin{aligned} a_n = O(b_n) &\implies R_a \geqslant R_b \\ a_n = o(b_n) &\implies R_a \geqslant R_b \\ a_n \sim b_n &\implies R_a = R_b \end{aligned}$$

**Exemple.**
Soit $P \in \mathbb{K}_d[X]$. Quel est le rayon de convergence de $\sum P(x) x^n$.
On a

$$P = \sum_{k=0}^{d} c_k X^k$$

On a $P(n) \underset{+\infty}{\sim} c_d n^d$.
Mais $\sum n^d x^n$ n'est pas une série entière de référence.
Mais, la série entière dérivée $d$-ième de $\dfrac{1}{1-x}$ est :

$$\sum n(n-1)(n-2)\dots(n-d+1)x^{n-d} = \frac{d!}{(1-x)^{d+1}}$$

Or, $\prod_{k=0}^{d-1} n - k \sim n^d$

# IV - Somme et produit de Cauchy

## IV.1 - Somme

### a) Énoncé à compléter

**Proposition 3.3.**

Soit $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R_a$ et $\sum b_n x^n$ de rayon de convergence $R_b$.
On pose pour $n \in \mathbb{N}$ : $c_n = a_n + b_n$.
On note $R_c$ le rayon de convergence de $\sum c_n x^n$.
Alors :

i) $R_c \geqslant \min(R_a, R_b) = r$.

ii) $\forall x ]-r, R[$ :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

### b) Commentaires

**Commentaires.**
On autorise $r = 0$ et dans ce cas :

i) est trivial,

ii) est vide : $]-r, r[= \emptyset$ si $r = 0$.

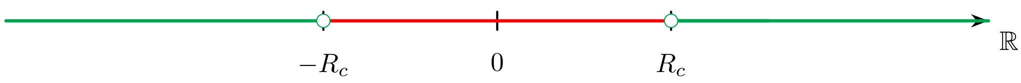
**Exemple.**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_n = 1 \\ b_n = -1 \\ c_n = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \begin{cases} R_a = 1 \\ R_b = 1 \\ R_c = +\infty > 1 = r \end{cases}$$

### c) Preuve

***Preuve.***
Supposons $r > 0$.
Soit $x_0 \in ]-r, r[$ :
la série numérique $\sum a_n x_0^n$ converge absolument car $|x_0| < R_a$ et la série numérique $\sum b_n x_0^n$ converge absolument car $|x_0| < R_b$.
On en déduit que la série numérique $\sum c_n x_0^n$ converge absolument par linéarité pour séries absolument convergente.
D'où $R_c \geqslant x_0$.
Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in ]-r, r[$ on obtient : $R_c$ majore l'ensemble $\{|x_0| \mid x_0 \in ]-r, r[\} = [0, r[$.
Donc $R_c \geqslant \sup([0, R[) = r$ (le sup d'un intervalle majorée est sa borne de droite).

$$|x| < R_c \implies \sum c_n x^n \text{ ACV}$$




$$|x| > R_c \implies \sum c_n x^n \text{ DVG (non-bornée)}$$

**Figure 3.4**

Par l'absurde supposons $r > R_c$ :

$$|x_0| < r \implies \sum c_n x^n \text{ ACV}$$

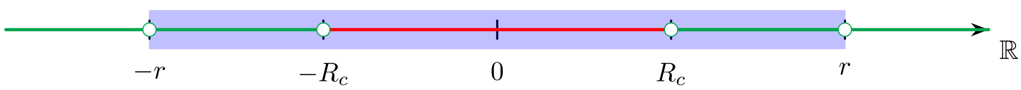



**Figure 3.5**

Contradiction car $R_c < |x_0| < r \implies \sum c_n x^n \begin{cases} \text{diverge car } |x_0| > R_c \\ \text{converge car } |x_0| < r \end{cases}$

□

**Mémo.**
$\sum c_n x_0^n$ converge $\implies |x_0| \leqslant R_c$
$\sum c_n x_0^n$ diverge $\implies |x_0| \geqslant R_c$

### d) Si $R_a \neq R_b$

**Proposition 3.4.**

$R_a \neq R_b \implies R_c = \min(R_a, R_b)$.

***Preuve.***
On sait déjà que $R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$.
Par l'absurde supposons $R_c > \min(R_a, R_b)$.
Supposons par exemple que $R_a < R_b$

$$|x_0| < r \implies \sum c_n x^n \text{ ACV}$$

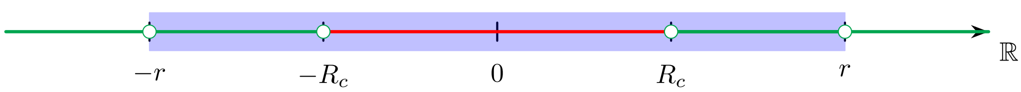



**Figure 3.6** – à finir

Il existe donc $x_0$ tel que : $\begin{cases} x_0 > R_a \\ x_0 < R_b \\ x_0 < R_c \end{cases}$.

Donc, $\sum a_n x_0^n$ diverge car $|x_0| > R_a$; $\sum b_n x_0^n$ converge absolument car $|x_0| < R_a$ et $\sum c_n x_0^n$ converge absolument car $|x_0| > R_a$. Or, convergent + divergent $\implies$ divergent, donc $\sum c_n x^n$ diverge car $a_n$ diverge.
**Contradiction**. □

### e) Dernières remarques

**Remarque**

Autre exemple où $R_c > \min(R_a, R_b)$ : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_n = 1 \\ b_n = -1 + \frac{1}{t^n} \end{cases}$.

On a donc $R_a = 1$ et $R_b = 1$.
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \dfrac{1}{t^n}$ donc $R_c = t$.

## IV.2 - Produit de Cauchy

C'est un corollaire facile du produit de Cauchy pour séries numériques absolument convergente.

### a) Énoncé

**Corollaire 3.1.**

Soit $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R_a$ et $\sum b_n x^n$ de rayon de convergence $R_b$ et pour $n \in \mathbb{N}$ : $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$.
Alors :

i) $R_c \geqslant \min(R_a, R_b) = r$

ii) $\forall x \in ]-r, r[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)$$

### b) Preuve

***Preuve.***
On suppose $r > 0$.
Soit $x_0 \in ]-r, r[$. Alors :

$$\text{La série numérique } \sum a_n x_0^n \text{ converge absolument car } |x_0| < r \leqslant R_a$$
$$\text{La série numérique } \sum b_n x_0^n \text{ converge absolument car } |x_0| < r \leqslant R_b$$

□

SE - CHAPITRE 4

# Unicité du DSE et EDL

## I - Théorème d'unicité du Développement en Série Entière

### I.1 - Premier énoncé - avec deux séries entières

**Théorème 4.1.**
Soit deux séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ .
On suppos que :

$$\exists r > 0,\ \forall x \in ]-r, r[,\ \sum a_n x^n \text{ et } \sum b_n x^n \text{convergent}$$

avec $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.
Alors :
$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = b_n \ \ i.e.\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

### I.2 - Deuxième énoncé - avec une série entière

**Théorème 4.2.**
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière telle que :

$$\exists r > 0,\ \forall x \in ]-r, r[,\ \sum a_n x^n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$ $i.e.$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle.

### I.3 - Équivalence des énoncés

**Sens direct ($\Rightarrow$) :**
Il suffit de prendre $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite nulle.
**Sens réciproque ($\Leftarrow$) :**
Posons pour $n \in \mathbb{N}$ : $c_n = a_n - b_n$.

Pour $x \in ]-r, r[$ : $\sum a_n x^n$ converge et $\sum b_n x^n$ converge avec $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.
donc (par linéarité pour séries numériques convergente) :

$$\text{la série (num) } \sum c_n x^n \text{ converge avec } \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = 0.$$

En appliquant le théorème 4.2 qu'on suppose, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle *i.e.* $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$.

**Remarque**

Le premier énoncé implique $R_a \geqslant r$ et $R_b \geqslant r$.
Le deuxième énoncé implique $R_a \geqslant r$.

### I.4 - Preuve du théorème 4.2

***Preuve.***
Supposons que $(a_n)$ telle que : $\exists r > 0,\ \forall x \in ]-r, r[,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$ et montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.

Posons $\begin{array}{rccc} S: & ]-r, r[ & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$.

D'après le théorème 2.4 (SE2), $S$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ qui est contenu dans l'intervalle ouvert de convergence et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$

Par hypothèse, $S$ est la fonction nulle (car $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$) donc :
$\forall n \in \mathbb{N}, S^{(n)}(0) = 0$ d'où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien la suite nulle. □

### I.5 - Remarque : analogies PTSI

**Remarque**

i) Théorème d'unicité du $\mathrm{DL}_0$

ii) Le deuxième énoncé fait penser au théorème :

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ admet une infinité de racines alors c'est le polynôme nul.

On a aussi si $P \in \mathbb{K}_d[X]$ et admet $d+1$ racines alors c'est aussi le polynôme nul.

## II - Solution développable en série entière d'une EDL

### II.1 - EDL simple

Le problème de Cauchy : $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ admet une unique solution : la fonction exponentielle.

Cherchons les solutions développable en série entière : $\begin{array}{rccc} y: & ]-R, R[ & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$ avec un rayon de convergence $R > 0$.

Par le théorème de dérivation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

$$\forall x \in ]-R, R[,\ y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1) a_{p+1} x^p$$

Or, $y' = y$ donc :

$$\forall x \in ]-R, R[, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^p$$

Par unicité du développement en série entière :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (n+1) a_{n+1}$$

De plus $a_0 = y(0) = 1$.

Ainsi, $\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1} \end{cases}$. On peut montrer par récurrence que $a_n = \dfrac{1}{n!}$.

# SE - CHAPITRE 5 Compléments

## I - $1^{er}$ complément

Comme promis voici une EDL où l'analyse pour trouver les solutions DSE fait apparaître des problèmes de bornes :

$$xy'' + 3y' - 4x^3y = 0.$$

Elle est dans le livre Ellipses jaune-gris, que j'ai en numérique, je pourrai poster une capture d'écran de la solution mais avec les indications ci-après (après le post suivant pour vous motiver à CHERCHER AVANT de regarder les indications) en appliquant la méthode vue en TD vous ne devriez pas avoir de problème.

### Indications pour le $1^{er}$ complément

1. La relation de récurrence à trouver dans l'analyse est

$$\forall n \geq 4, \qquad a_n = \frac{4a_{n-4}}{n(n+2)}$$

   avec les conditions $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

2. Dans le calcul les problèmes de bornes conduisent au “terme parasite” (à **NE PAS OUBLIER**)

$$3a_1 + 8a_2x + 15a_3x^2.$$

   Pour le regroupement des sommes par linéarité on ne peut regrouper qu'à partir de $x^3$.

3. La synthèse est intéressante car on peut la faire **SANS** calculer complètement $a_{4p}$ (on a par récurrence immédiate $a_{4p+1} = a_{4p+2} = a_{4p+3} = 0$), **MAIS** le calcul de la somme (pour l'exprimer à l'aide des fonctions usuelles) nécessite le calcul complet de $a_{4p}$.
   On se débarrasse d'abord du cas où $a_0 = 0$ qui donne par récurrence immédiate

$$\forall p, \qquad a_{4p} = 0,$$

   donc dans ce cas $y$ est la fonction nulle : OK !

4. (a) On suppose donc $a_0$ non nul, et on commence par montrer par récurrence (immédiate mais faites là

pour être sûr que vous la trouvez bien immédiate)

$$\forall p, \qquad a_{4p} \text{ est non nul.}$$

(b) Calculer $R$ : on peut utiliser la règle de d'Alembert pour séries numériques en fixant $x \in \mathbb{R}^*$ et en posant

$$u_p = |a_{4p}x^{4p}| > 0.$$

La relation de récurrence sur la suite $(a_n)$ permet de simplifier

$$\frac{a_{4(p+1)}}{a_{4p}} = \frac{a_{4p+4}}{a_{4p}}$$

et de trouver que $\dfrac{u_{p+1}}{u_p}$ tend vers $L = 0$.

Comme $L < 1$ la règle de d'Alembert pour séries numériques donne la convergence de la série $\sum u_p$, ce qui signifie que la série $\sum a_{4p}x^{4p}$ est ACV.

(c) Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on peut conclure que $R = +\infty$, ceci SANS AVOIR calculé $a_{4p}$.

5. Par contre pour calculer $y(x)$ on a besoin de la formule

$$\forall p, \qquad a_{4p} = \frac{a_0}{(2p+1)!},$$

qu'on trouve par 2 méthodes :

**1re méthode :** "conjecture + récurrence (immédiate)"

On calcule $a_4$, $a_8$, $a_{12}$ jusqu'à conjecturer la formule, la récurrence est ensuite immédiate.

**2e méthode :** On aligne les égalités

$$\begin{aligned} a_4 &= b_1 a_0 \\ a_8 &= b_2 a_4 \\ a_{12} &= b_3 a_8 \\ &\vdots \\ a_{4p} &= b_{p-1} a_{4p-4} \end{aligned}$$

On multiplie terme à terme

$$a_4 a_8 \cdots a_{4p} = (b_1 b_2 b_3 \cdots b_{p-1})(a_0 a_4 a_8 \cdots a_{4p-4}).$$

On **PEUT SIMPLIFIER** par le facteur commun non nul $a_4 a_8 \cdots a_{4p-4}$ (cf 4)a)) :

$$a_{4p} = (b_1 b_2 b_3 \cdots b_{p-1}) a_0$$

et il reste à simplifier $b_1 b_2 b_3 \cdots b_{p-1}$ pour obtenir $\dfrac{1}{(2p+1)!}$. C'est l'occasion d'en profiter pour réviser le TD sur les intégrales de Wallis.

**Conclusion.**

$$y(x) = a_0 \frac{\mathrm{sh}(x^2)}{x^2}.$$

# II - 2e complément : EDL sans solutions DSE

Et comme promis aussi une EDL sans solutions DSE :

$$x^2y' - y = -x.$$

Dans la synthèse on trouve que le rayon de convergence de la solution DSE trouvée dans l'analyse est nul :'( et on peut conclure qu'il n'y a aucune solution DSE.
Indications après le post suivant pour vous motiver à CHERCHER AVANT de regarder les indications :), mais ici l'analyse est aussi FACILE que celle du cours pour la fonction exp.

## Indications pour le 2e complément

BEAUCOUP + FACILE que le 1er !
Dans l'analyse on doit trouver $a_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = (n-1)!.$$

La synthèse est TRIVIALE : la règle de d'Alembert pour les séries entières s'applique et donne $R = 0$.

**NB.** C'est comme ça que j'ai "inventé" cet exo : je suis parti de la série entière (que je savais de rayon $R = 0$ car vue en cours) que j'ai dérivée en faisant comme si le théorème de dérivation s'applique (ce qui N'EST PAS LE CAS puisque $R = 0$) pour trouver l'équation différentielle qu'évidemment je ne connais pas par coeur.

**BONUS révision PTSI.** Résoudre l'EDL1 non homogène (donc variation de la constante car ÉVIDEMMENT pas de solution "évidente") sur $]0, +\infty[$ (l'intervalle le plus simple et le plus grand sur lequel la fonction $x \mapsto x^2$ en facteur de $y'$ (la dérivée d'ordre le plus grand qui intervient dans l'équation) NE S'ANNULE PAS).
Forme résolue de l'EDL (avec le coefficient de $y'$ qui vaut 1) sur $]0, +\infty[$ :

$$y' - \frac{1}{x^2}y = -\frac{1}{x}.$$

# III - BD

Le **théorème d'Abel** dont on a parlé en commentant la BD n'est plus au programme : ça n'a aucun rapport avec cette discussion mais ça a un rapport avec les séries entières.
Les 2 mamies de la BD sont donc très savantes.

**NB.** L'exponentielle de matrices n'est pas au programme non plus et un ORAL PT récent était le calcul de $\exp(A)$ où $A$ la matrice $2 \times 2$ anti-symétrique

$$\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}.$$

que je n'ai pas eu le temps de vous montrer, très joli exo qui mélange analyse et algèbre linéaire, le matheux aime ce genre d'exos qui mélange des thèmes variés ♡.

**Indication.** Commencer par calculer $A^2$, $A^3$, $A^4$, puis trouver une formule pour $A^{2p}$ et $A^{2p+1}$.